



4

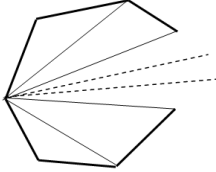


Funções Reais

Neste capítulo, estudaremos as protagonistas do longa metragem chamado Cálculo Diferencial e Integral: as funções reais. São delas os limites a serem calculados e são elas quem serão submetidas a derivações e a integrações de todos os gêneros. Portanto, nada mais justo do que um capítulo dedicado a elas com exclusividade.

O presente trabalha as funções e seus conceitos associados tais como fórmulas, determinação de domínios e contradomínios, gráficos, retas assíntotas, raízes e sinais ricamente ilustrados com exemplos detalhados. Em seguida, estudamos a customização de funções, passo tão importante para a otimização. Apresentamos também as qualidades e a classificação das funções reais, bem como a composição e a inversão. Finalmente, as funções trigonométricas e suas inversas, as funções exponenciais, logarítmicas e hiperbólicas.

Função é um dos conceitos mais importantes, uma vez que todos os ramos da Matemática e todas as ciências e as tecnologias que dela dependem o utilizam amplamente.



De fato, um polígono convexo de x lados apresenta x vértices. De cada vértice do polígono, partem $(x - 3)$ diagonais, pois precisamos excluir os 2 vértices vizinhos e o próprio vértice em questão. Como temos x vértices, este número de diagonais deverá ser multiplicado por x . Mas, cada diagonal, desta forma, será contada 2 vezes; assim, precisamos dividir por 2.

Não é difícil concluir que y será um número natural também, pois, como ou x ou $(x-3)$ é par, segue que $x \cdot (x-3)$ é par e a metade de um número par é natural.

Os pontos desta função pertencem à parábola mas nem todos os pontos da parábola pertencem à função, uma vez que o número de lados x é natural maior ou igual a 3.

De fato, sob a ação da gravidade com aceleração constante $g \approx 10 \text{ m/s}^2$, um objeto cai distâncias x diretamente proporcionais aos quadrados dos tempos y , onde a constante de proporcionalidade é $g/2$:

$$x = \frac{g}{2}y^2 \approx 5y^2 \rightarrow y \approx \sqrt{\frac{x}{5}}$$

Ao contrário do exemplo anterior, os pontos desta função serão todos os pontos da curva, para $x \geq 0$, porque podemos considerar as alturas x e os tempos y como números reais. Assim, os pontos calculados na tabela estão apenas destacados no gráfico.

CONCEITO DE FUNÇÃO

Função significa, essencialmente, uma bem definida dependência entre duas variáveis, y e x , onde o valor de y dependerá exclusivamente do valor de x e para cada x , existirá um único y associado. Este único y poderá ser obtido a partir de uma **fórmula matemática**, visualizado numa **tabela**, lido a partir de um **gráfico**, ou, pelo menos, tendo seu valor estimado conforme as circunstâncias. A seguir, vamos dar algumas ilustrações.

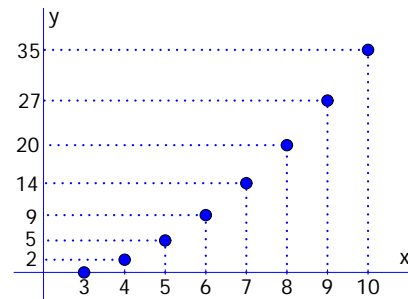
Exemplo 4A

O número de diagonais y de um polígono convexo dependerá do número de lados x que o mesmo apresenta. Assim, dizemos que o número de diagonais y é função do número de lados x do polígono. A geometria nos fornece uma fórmula para o cálculo de y :

$$y = \frac{1}{2}x \cdot (x - 3)$$

Para $x \geq 3, x \in \mathbb{N}$. Montamos uma tabela e um gráfico no plano cartesiano, ilustrando alguns de seus valores calculados através desta fórmula:

x	y	x	y
3	0	7	14
4	2	8	20
5	5	9	27
6	9	10	35



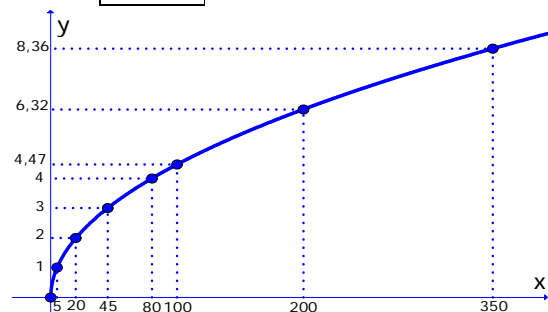
O ponto (3, 0) indica que o triângulo (3) não possui diagonais (0), o ponto (4, 2) indica que o quadrilátero (4) tem 2 diagonais, etc.

Exemplo 4B

O tempo de queda em segundos y de um corpo deixado cair é função da altura x em metros de onde cai. A Física nos fornece uma fórmula:

$$y = \sqrt{\frac{x}{5}}$$

x	y	x	y
0	0	80	4
5	1	100	4,47
20	2	200	6,32
45	3	350	8,36



Este processo chama-se **interpolação** e consiste em encontrar uma curva de equação conhecida cujos pontos mais se aproximam dos pontos da função. Seus procedimentos matemáticos são trabalhosos e suas justificativas fogem ao caráter introdutório deste livro. Na figura, interpolamos uma reta (pontilhada), uma quadrática (linha fina) e uma cúbica (linha grossa) com as equações:

$$\begin{aligned} y &= -1550x + 22300 \\ y &= 369,05x^2 - 4871,4x + 27836 \\ y &= -58,586x^3 + 1160x^2 - 7888,6x + 30736 \end{aligned}$$

onde $x = X - 2000$, mudança de variável feita para se trabalhar com números menores. Outros tipos comuns de funções interpoladoras são exponencial, logarítmica e potência.

Em Estatística, este estudo recebe o nome de **Regressões Simples**, pelo fato de utilizar valores ocorridos no passado (regressões) e a dependência de uma variável y a uma única variável x (simples).

Assim, é intuitivo compreender que quanto melhor a qualidade da matéria prima e dos processos, maior será a durabilidade do produto.

Quanto menor o tempo de espera para ser atendido, maior será a satisfação do cliente.

Quanto maior o número de veículos circulantes, menor será a qualidade do ar.

Quanto maiores as taxas, maiores serão os investimentos em bolsa.

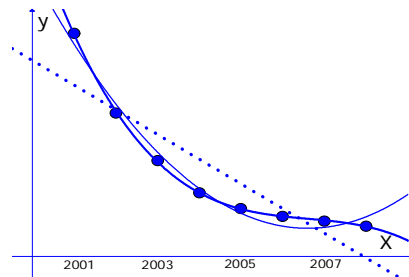
Exemplo 4C

O valor de tabela y de um automóvel em reais se comportou ao longo dos anos X conforme as informações seguintes:

X	y
2001	24.000,00
2002	19.000,00
2003	16.000,00
2004	14.000,00

X	y
2005	13.000,00
2006	12.500,00
2007	12.200,00
2008	11.900,00

Podemos visualizar estes valores num gráfico do plano cartesiano, mas, a Economia não nos fornece uma fórmula matemática exata para o cálculo do valor y conforme o ano X . De qualquer modo, podemos afirmar que o valor y do carro é função do ano X . Podemos, no entanto, **interpol**ar curvas de equações conhecidas a estes pontos, que se resume a atribuir retas, parábolas, cúbicas, etc que mais se aproximam dos pontos da função:



Veja como as curvas interpoladoras se aproximam mais ou menos dos pontos da função preço de tabela versus ano, neste caso, conforme maior ou menor complexidade algébrica da curva. As curvas de interpolação servem para equacionar variáveis e revelar tendências e podem ser consideradas uma importante aplicação das derivadas ao campo da Estatística.

Exemplo 4D

Existem funções cujas variáveis quantitativas são de difícil ou até de subjetiva mensuração. São exemplos:

a) Durabilidade x Qualidade (Tecnologia)

A durabilidade de um produto é função da qualidade da matéria prima e dos processos utilizados em sua fabricação.

b) Satisfação x Tempo de Espera (Psicologia)

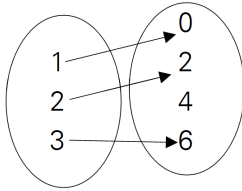
O nível de satisfação dos clientes é função do tempo em que os mesmos esperam para serem atendidos.

c) Qualidade do Ar x Número de Veículos (Urbanismo)

A qualidade do ar numa cidade é função do número de veículos que circulam na mesma.

d) Investimentos x Taxas de Juros (Economia)

O volume de investimentos na Bolsa de Valores é função das taxas de juros pagas pelo governo.



Aqui temos um exemplo de uma função com 3 pares de valores, x e y , representados num **diagrama de Venn**.

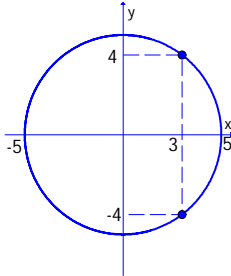
Para esta função, temos:

$$D = \{1, 2, 3\}$$

$$CD = \{0, 2, 4, 6\}$$

$$Im = \{0, 2, 6\}$$

O valor 4, apesar de pertencer ao contradomínio CD, não pertence à imagem Im por não estar relacionado a nenhum valor do domínio D.



Veja que, para $x = 3$, existem 2 valores de y associados, -4 e 4 .

A primeira fórmula é a função real $f_1(x)$ cujo gráfico é o ramo superior enquanto que a segunda é a função $f_2(x)$ do ramo inferior da circunferência. Para obter tais fórmulas, isolamos y a partir de $x^2 + y^2 = 25$, onde a extração da raiz quadrada levou em conta as possibilidades positiva e negativa.

Fatorando por quadrado de binômio, a equação assumirá a fórmula da parábola discutida no capítulo anterior.

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - 2x - 8 = y \\ \rightarrow x^2 - 2x &= y + 8 \\ x^2 - 2x + 1 &= y + 8 + 1 \\ (x - 1)^2 &= 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot (y + 9) \end{aligned}$$

Por outro lado, se resolvéssemos a equação igualada a zero, iríamos obter os pontos de interseção da parábola com o eixo x : $x = -2$ e $x = 4$, pois tais pontos têm coordenada $y = 0$.

CONCEITOS ASSOCIADOS

O conjunto dos valores x é chamado **domínio D**, enquanto que o conjunto dos valores y é chamado **contradomínio CD**. O subconjunto deste contradomínio que está associado ao domínio é chamado **imagem Im**. Veja um exemplo simples mostrado na coluna auxiliar.

Quando o domínio for um subconjunto contínuo de números reais, ou a união destes subconjuntos, a função f será qualificada como **função real** e será representada também por **$y = f(x)$** . Esta notação serve para enfatizar essencialmente a dependência que a variável y mantém com a variável real x . O exemplo ao lado, portanto, não é de função real pois tem domínio discreto sobre \mathbb{R} (não é contínuo). Igualmente, os exemplos 4A e 4C não são de funções reais. O exemplo 4B é de função real, pois o domínio é o subconjunto contínuo $x \geq 0$ de \mathbb{R} .

Exemplo 4E

Toda função poderá ter uma equação que a defina mas nem toda equação em x e y representará uma função. A circunferência $x^2 + y^2 = 25$ não pode representar uma função porque, para cada x , quase nunca temos um único y associado. De fato:

- a) para $x < -5$ ou $x > 5$, não existe y associado;
- b) para $x = -5$ ou $x = 5$, existe único y associado, $y = 0$;
- c) para $-5 < x < 5$, existem 2 valores de y associados.

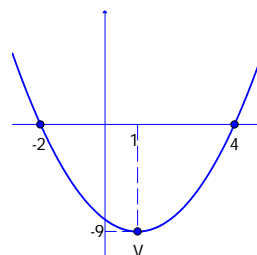
Desta forma, para que a equação represente função, deveremos fazer algumas modificações. Por exemplo, poderemos considerar no domínio apenas os valores $-5 \leq x \leq 5$ e na imagem apenas um dos ramos da circunferência, o superior ou o inferior:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \sqrt{25 - x^2}, \text{ para } -5 \leq x \leq 5 \\ \text{e} \\ f_2(x) &= -\sqrt{25 - x^2}, \text{ para } -5 \leq x \leq 5 \end{aligned}$$

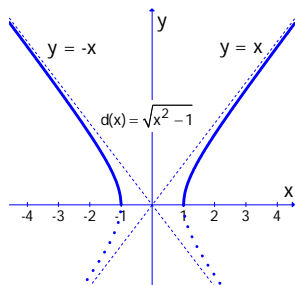
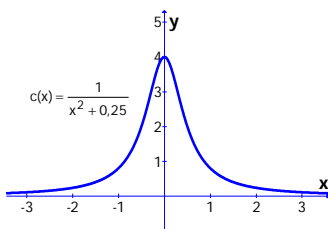
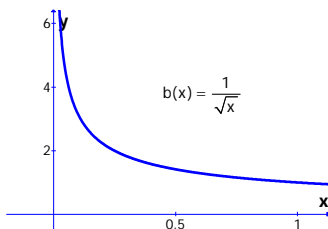
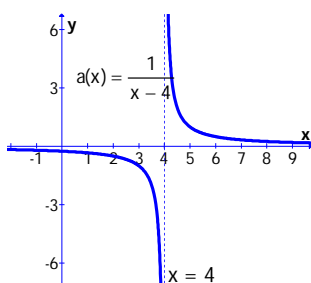
Veja que, desta forma, cada valor de x estará associado a um único valor de y , para cada uma das funções reais $f_1(x)$ e $f_2(x)$.

Exemplo 4F

Considere a função real dada por $f(x) = x^2 - 2x - 8$. A seguir, exibimos seu gráfico e, na coluna auxiliar, provamos que se trata de uma parábola com diretriz paralela ao eixo x , vértice em $V = (1, -9)$ e distância focal igual a $1/4$.



A definição mais precisa de reta assintota utiliza o conceito de limites de funções a ser apresentado no volume 1.



DOMÍNIO DE FUNÇÃO REAL E RETAS ASSÍNTOTAS

Quando a função real estiver definida apenas por uma fórmula e seu **domínio não estiver especificado**, este ficará subentendido como o maior subconjunto de \mathbb{R} para o qual as operações indicadas em sua fórmula forem possíveis. Uma reta é considerada **assíntota** da função quando uma extremidade de seu gráfico puder ficar tão próxima quanto se queira da reta, porém, sem nunca tocá-la nesta aproximação.

Exemplo 4G

Encontre os domínios subentendidos e as retas assintotas das funções:

$$a(x) = \frac{1}{x-4} \quad b(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \quad c(x) = \frac{1}{x^2 + 0,25} \quad d(x) = \sqrt{x^2 - 1}$$

O domínio de $a(x)$ será $D = \{x \in \mathbb{R} / x \neq 4\}$ porque o valor de $x = 4$ não pode ser substituído em sua fórmula, pois implicaria numa divisão por zero ($1 \div 0$). O gráfico de $a(x)$ é interrompido bruscamente em $x = 4$, quebrando-se em 2 ramos. A extremidade esquerda do ramo direito aumenta para um valor tão alto quanto o desejado, pois, à medida que x se aproxima de 4, $x - 4$ se aproximará de zero e, com isso, 1 dividido por um número pequeno resultará num número tão grande quanto se queira, bastando aproximar mais ou menos x de 4. Processo análogo ocorre no lado direito do ramo esquerdo da curva. Assim, a reta vertical $x = 4$ não encostará em nenhum ponto do gráfico de $a(x)$, mas o gráfico de $a(x)$ se aproximará o tanto quanto queiramos desta reta. Assim, $x = 4$ é **assíntota vertical** da função $a(x)$. Analogamente, $y = 0$ (eixo x) é a **assíntota horizontal** de $a(x)$.

O domínio de $b(x)$ será $D = \{x \in \mathbb{R} / x > 0\}$ porque o valor de $x = 0$ não pode ser substituído em sua fórmula, pois anularia o denominador e além disso, valores menores que zero também não, pois não podemos extrair raízes quadradas reais de números negativos. O gráfico de $b(x)$ é um único ramo presente no 1º quadrante do plano cartesiano. Aqui, temos as assíntotas vertical e horizontal, respectivamente, $x = 0$ e $y = 0$ (eixos y e x).

O domínio de $c(x)$ será \mathbb{R} , pois podemos substituir todos os números reais em sua fórmula, já que $x^2 + 0,25$ nunca será zero, isto é, a soma do quadrado de um número real (x^2 , que é sempre positivo ou zero) com outro número positivo (0,25) sempre resulta positiva, para qualquer que seja o real x . Igualmente, a função $c(x)$ tem assíntota horizontal $y = 0$ (eixo x), pois, seu gráfico ficará tão próximo desta reta quanto queiramos, aumentando-se ou diminuindo-se o valor de x .

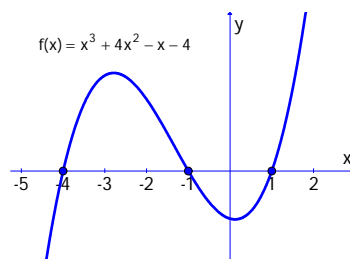
Finalmente para $d(x) = \sqrt{x^2 - 1}$, quando $x^2 - 1$ torna-se negativo, ficamos impedidos de encontrar sua raiz quadrada. Isso ocorre no intervalo $-1 < x < 1$, que estará fora do domínio: $D = \{x \in \mathbb{R} / x \leq -1 \text{ ou } x \geq 1\}$. À medida que x aumenta, subtrair 1 unidade de x^2 e extrair a raiz quadrada resultará, cada vez mais próximo da raiz quadrada do próprio x^2 , isto é, x . Assim, a reta $y = x$ é uma **assíntota** de $d(x)$. O mesmo dizer para a reta $y = -x$. Mostra-se que o gráfico de $d(x)$ são os semicírculos positivos da hipérbole $x^2 - y^2 = 1$ que tem focos $F_1 = (0, -\sqrt{2})$ e $F_2 = (0, \sqrt{2})$.

RAÍZES DE FUNÇÃO REAL

Alguns autores utilizam o termo **zeros** de uma função real, para não haver confusão com **raízes** quadradas, cúbicas, etc. No entanto, os zeros de uma função são chamados também de raízes de uma função porque, para muitas funções, seus zeros são obtidos extraindo-se raízes quadradas, cúbicas, etc.

Igualamos o numerador a zero. Isso porque uma fração é nula quando o numerador é nulo e o denominador não. Como $x = 2$ anula somente o numerador, segue que $x = 2$ será a raiz de $e(x)$.

Observe como o gráfico toca o eixo x em $x = 2$. A reta $x = 3$ é uma assíntota vertical de $e(x)$ porque, em $x = 3$, $e(x)$ não está definida devido à divisão $1 \div 0$. A reta $y = 1$ é a assíntota horizontal porque, para valores muito altos de x , $x - 2$ será sempre maior do que $x - 3$, mas a divisão de tais números será o quão próximo a 1 quanto desejarmos. A mesma aproximação ocorrerá para valores muito negativos de x , agora, porém, por valores abaixo de 1.



Observe como a polinomial toca o eixo x em 3 pontos, $x = -4$, $x = -1$ e $x = 1$. Assim, estas são as raízes da função $f(x)$.

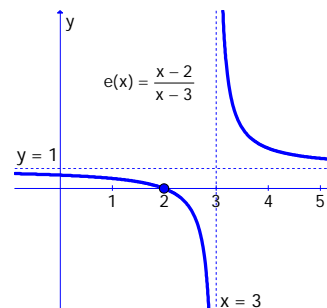
As raízes de uma função real são os valores de x que a tornam nula, isto é, $f(x) = y = 0$. Assim, para localizá-las, observamos onde o gráfico encontra o eixo x (já que o eixo x é a reta $y = 0$). Para determiná-las, então, deveremos resolver a equação $y = 0$ no conjunto dos números reais. As funções $a(x)$, $b(x)$ e $c(x)$ da seção anterior não têm raízes, uma vez que nenhum valor de x consegue zerar sua fórmula (não tocam o eixo x). A função $d(x)$, por outro lado, apresenta as raízes -1 e 1 .

Exemplo 4H

Encontre a raiz da função $e(x) = \frac{x-2}{x-3}$.

$$\frac{x-2}{x-3} = 0 \rightarrow x-2 = 0 \rightarrow x = 2$$

Destacamos a raiz $x = 2$ no gráfico de $e(x)$ que é exibido a seguir. Veja que $e(x)$ apresenta as assíntotas $x = 3$ e $y = 1$:



Exemplo 4I

Encontre as raízes da função $f(x) = x^3 + 4x^2 - x - 4$.

Esta função é uma polinomial de grau 3 que pode facilmente ser reduzida ao produto de 3 funções do grau 1 através da fatoração, conforme vimos no capítulo 2:

$$\begin{aligned} x^3 + 4x^2 - x - 4 &= 0 \\ x^2(x+4) - (x+4) &= 0 \\ (x+4) \cdot (x^2 - 1) &= 0 \rightarrow (x+4) \cdot (x+1) \cdot (x-1) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -4 \\ x = -1 \\ x = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Obter as raízes de uma função real, geralmente, não é tarefa simples, pois igualar a zero as fórmulas de muitas funções recai em equações complicadas e mesmo algebricamente impossíveis. No volume 1, você aprenderá a obter aproximações de raízes destas funções usando o **método de Newton**, quando estudar as aplicações de derivação.

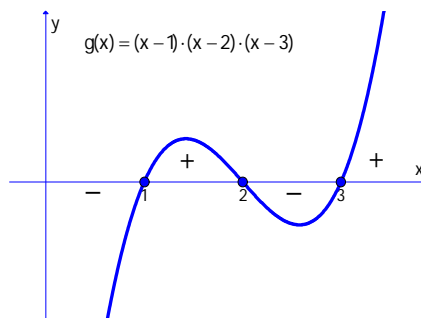
SINAIS DE FUNÇÃO REAL

Uma das maneiras de observar os sinais assumidos por uma função real, isto é, saber os intervalos de x para os quais ela é positiva ou negativa, é traçar seu gráfico e concluir diretamente sobre ele.

Exemplo 4J

Estude os sinais da função $g(x) = (x-1) \cdot (x-2) \cdot (x-3)$.

As raízes de $g(x)$ serão 1, 2 e 3, pois qualquer um destes valores anulará todo o produto que define esta função. Veja que, para $x < 1$, g assume valores negativos (seu gráfico está abaixo do eixo x). Para $1 < x < 2$, g assume valores positivos (gráfico acima do eixo x); para $2 < x < 3$, valores negativos novamente e, para $x > 3$, valores positivos novamente. Assim, podemos sintetizar estas conclusões no quadro ao lado do seu gráfico.



$$g(x) < 0 \Rightarrow \begin{cases} x < 1 \text{ ou} \\ 2 < x < 3 \end{cases}$$

$$g(x) > 0 \Rightarrow \begin{cases} 1 < x < 2 \text{ ou} \\ x > 3 \end{cases}$$

Mesmo sem termos o gráfico da função, podemos chegar às mesmas conclusões se soubermos que uma função real **pode mudar seu sinal**:

- antes e depois de uma raiz;
- antes e depois de uma descontinuidade.

Na coluna auxiliar, argumentamos sobre estas duas possibilidades de mudanças nos sinais da função, antes e depois de raiz ou descontinuidade. Assim, para obter os sinais da função $g(x)$ deste último exemplo, bastaríamos verificar os sinais em:

- qualquer ponto antes de $x = 1$; e em
- qualquer ponto do intervalo $1 < x < 2$; e em
- qualquer ponto do intervalo $2 < x < 3$; e em
- qualquer ponto após $x = 3$.

$$\begin{array}{l} \text{a) } g(0) = (0-1) \cdot (0-2) \cdot (0-3) = -6 \rightarrow - \\ \text{b) } g(1,5) = (1,5-1) \cdot (1,5-2) \cdot (1,5-3) = +0,375 \rightarrow + \\ \text{c) } g(2,5) = (2,5-1) \cdot (2,5-2) \cdot (2,5-3) = -0,375 \rightarrow - \\ \text{d) } g(4) = (4-1) \cdot (4-2) \cdot (4-3) = +6 \rightarrow + \end{array}$$

Isso porque, como $g(x)$ não tem descontinuidades e tem raízes em $x = 1$, $x = 2$ e $x = 3$, em qualquer ponto antes de $x = 1$, o valor de g terá o mesmo sinal. Assim, tomamos $x = 0$ para facilitar a sua obtenção. O mesmo procedimento deverá ser feito entre as raízes e após a última $x = 3$, isto é, escolher pontos com o intuito de apenas avaliar o sinal da função. Veja que os sinais assim obtidos concordam rigorosamente com aqueles observados diretamente sobre o gráfico da função $g(x)$.

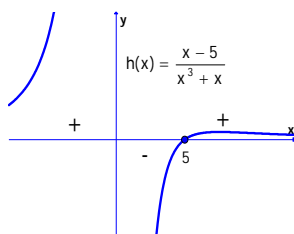
O esquema seguinte serve para sintetizar todas as informações acerca dos sinais da função $g(x)$ e também para ajudar a estruturar este procedimento. Abaixo do traço, temos os valores de x relevantes para a mudança de sinal da função: neste caso, apenas as raízes, pois a função é contínua para todos os números reais. Acima do traço, representamos a função $g(x)$, os valores assumidos em cada um dos pontos relevantes (no caso, como são raízes, apenas zeros) e também os sinais entre estes pontos.

$$\begin{array}{cccc|c} - & 0 & + & 0 & - & 0 & + & g(x) \\ \hline & 1 & & 2 & & 3 & & x \end{array}$$

Exemplo 4K

Estude os sinais da função $h(x) = \frac{x-5}{x^3+x}$, sem utilizar seu gráfico.

O denominador se anula quando $x^3 + x = 0 \rightarrow x(x^2 + 1) = 0$ isto é, apenas para $x = 0$ pois $x^2 + 1$ é sempre > 0 . Logo: descontinuidade = 0 e raiz = 5



Veja que os sinais obtidos com este procedimento estão corretos pois concordam com aqueles lidos diretamente a partir do gráfico. Veja que $h(x)$ tem assintotas $x = 0$ e $y = 0$, apesar de tocar nesta reta (o eixo x é a reta $y = 0$) quando $x = 5$. Isso porque, à medida que aumentamos o valor de x , mais o valor de y tenderá a zero e, **nesta aproximação**, não será nunca igual a zero, apesar de já ter ficado igual a zero quando $x = 5$.

Em outras palavras, precisamos estudar os sinais de outra função $j(x)$, pois $i(x)$ só existirá quando $j(x)$ for positiva ou zero. Esta função $j(x)$ tem o domínio real $x \geq -1$ e sua raiz pode ser obtida igualando-se $j(x) = 0$. Apenas o valor de x_2 verifica a equação, pois x_1 , sendo positivo implicará $x_1 + 1$ positivo e sua raiz quadrada também que somada ao próprio x_1 não poderá ser zero. Esta verificação é necessária porque transformamos uma equação em outra ao elevarmos ao quadrado.

Observe como o gráfico de $j(x)$ fornecerá o domínio de $i(x)$: somente quando $j(x)$ for maior ou igual a zero (isto é, a partir de x_2) é que $i(x)$ existirá.

A raiz de $h(x)$ é $x = 5$, enquanto que sua descontinuidade é $x = 0$ (veja coluna auxiliar). Assim, precisamos avaliar os sinais das funções em:

- a) qualquer ponto antes de $x = 0$; e em
- b) qualquer ponto do intervalo $0 < x < 5$; e em
- c) qualquer ponto após $x = 5$.

a) $h(-1) = \frac{-1-5}{(-1)^3+(-1)} = \frac{-6}{-2} = +3 \rightarrow +$
 b) $h(1) = \frac{1-5}{1^3+1} = \frac{-4}{2} = -2 \rightarrow -$
 c) $h(6) = \frac{6-5}{6^3+6} = + \dots \rightarrow +$

Esquemáticamente:

+	\exists	-	0	+	h(x)
0	5	x			

Exemplo 4L

Encontre o domínio da função real $i(x) = \sqrt{x + \sqrt{x+1}}$.

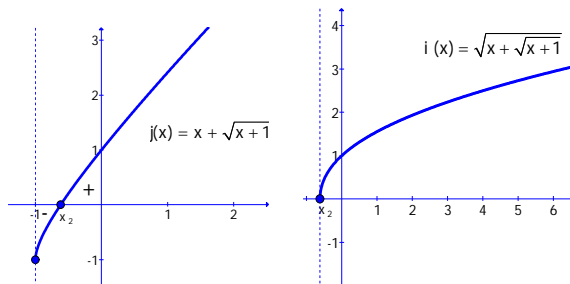
A raiz quadrada mais externa só existirá quando seu radicando não for negativo. Assim, precisamos resolver a seguinte inequação:

$$j(x) = x + \sqrt{x+1} \geq 0$$

$$\begin{aligned} x + \sqrt{x+1} = 0 &\rightarrow \sqrt{x+1} = -x \\ (\sqrt{x+1})^2 &= (-x)^2 \rightarrow x+1 = x^2 \\ x^2 - x - 1 = 0 &\left\{ \begin{array}{l} x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{array} \right. \end{aligned}$$

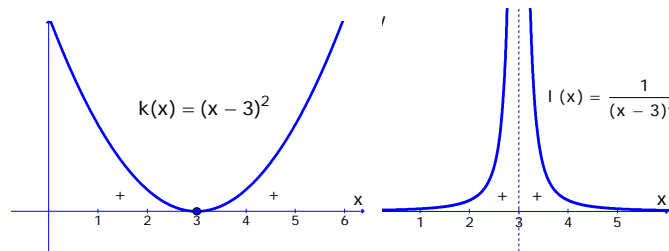
\exists	1	-	0	+	j(x)
-1	x_2	x			

Assim, a partir dos sinais de $j(x)$, podemos concluir que o domínio de $i(x)$ será todos os valores x iguais ou maiores que x_2 : $D = \{x \in \mathbb{R} / x \geq (1-\sqrt{5})/2\}$. A seguir, mostramos os gráficos de $j(x)$ e de $i(x)$:



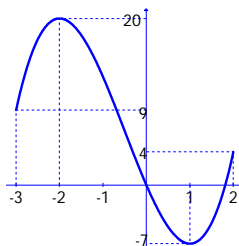
Haverá casos em que a função não mudará de sinal antes e depois da raiz ou da descontinuidade, respectivamente, como observamos nas funções $k(x)$ e $l(x)$ cujas fórmulas e gráficos são mostrados a seguir:

Isso já estava previsto nas orientações iniciais desta seção quando destacamos a possibilidade em vez da necessidade de mudança de sinais antes e depois de uma raiz ou descontinuidade.



EXERCÍCIOS IMEDIATOS

- 1) A sequência de números $a_n = 3n$, onde n é um número natural, pode ser entendida como uma função. Você poderia:
 - a) Identificar qual é esta sequência?
 - b) Especificar uma fórmula em x e y para esta função?
 - c) Montar uma tabela com alguns valores desta função?
 - d) Encontrar o domínio e a imagem desta função?
 - e) Mostrar a função no plano cartesiano?



Dica 4: isole y e conclua que um único x poderá possuir dois valores de y associados.

Dica 5: $m(x)$ não pode ter raízes por ser a soma de 3 funções crescentes e iniciar em $x = 1$. As funções $n(x)$ e $o(x)$ são análogas à do exemplo 4L. As funções s , t , u e v necessitam de fatoraçoão para obtenção de suas raízes.

- 2) A área de um quadrado pode ser entendida como função do tamanho de seu lado.
 - a) Especifique uma fórmula em x e y para esta função.
 - b) Monte uma tabela com alguns valores desta função.
 - c) Encontre o domínio e a imagem desta função.
 - e) Mostre a função no plano cartesiano.
- 3) Encontre o domínio e a imagem da função mostrada no gráfico ao lado.
- 4) Mostre que a hipérbole de equação $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ não pode representar uma única função.

5) Determine os domínios, as raízes e os sinais das seguintes funções reais:

- | | | |
|---|--|----------------------------------|
| $a(x) = 5x - 1$ | $b(x) = x^2 - 4x + 5$ | $c(x) = x^3 + 3x^2 + x + 3$ |
| $d(x) = x^{-2} + 5x^{-1} + 6$ | $e(x) = \frac{1-x}{x-1}$ | $f(x) = \frac{3}{x^2-16}$ |
| $g(x) = \frac{3}{x^2+16}$ | $h(x) = \sqrt{x-5}$ | $i(x) = \sqrt[3]{x-7}$ |
| $j(x) = \sqrt{x^2-6x+8}$ | $k(x) = \sqrt{x^2+x+1}$ | $l(x) = \frac{3}{\sqrt{x^2-2x}}$ |
| $m(x) = \sqrt{x} + \sqrt{x-1} + \sqrt{x+2}$ | $n(x) = \sqrt{x-\sqrt{x+4}}$ | $o(x) = \sqrt{x-\sqrt{x-4}}$ |
| $p(x) = (x-4)^3$ | $q(x) = (x-3) \cdot (x+4) \cdot (2-x)$ | $r(x) = x^2 + 49$ |
| $s(x) = x^3 + x^2 - x - 1$ | $t(x) = x^3 - 5x^2 + 2x - 10$ | $u(x) = 8 - x^3$ |
| $v(x) = (x-5)^3 + x(x-5)^2$ | $w(x) = \frac{x^2-1}{x^2-4}$ | $z(x) = \frac{x^3}{(x-2)^3}$ |

EXERCÍCIOS INTERMEDIÁRIOS

6) Uma **função algébrica racional fracionária** é aquela do tipo $R(x) = N(x)/D(x)$, onde $N(x)$ e $D(x)$ são polinômios. Esta função apresentará assíntotas verticais para os pontos em que $D(x) = 0$ e uma única assíntota horizontal caso o grau de $N(x)$ seja menor ou igual ao de $D(x)$. Tal assíntota é $y = k$, onde k é o número para o qual $R(x)$ tende quando fazemos x tender a $+\infty$ e a $-\infty$ também. Para as funções racionais do exercício anterior, encontre as assíntotas verticais e horizontais.

7)

a) Mostre que o gráfico da função $y = -\frac{4}{5}\sqrt{25-x^2}$ é um arco de elipse.

b) Encontre o domínio e a imagem desta função.

8)

a) Mostre que o gráfico de $y = \frac{1}{12}\sqrt{25x^2 - 3600}$ são arcos de uma hipérbole.

b) Encontre o domínio e a imagem desta função.

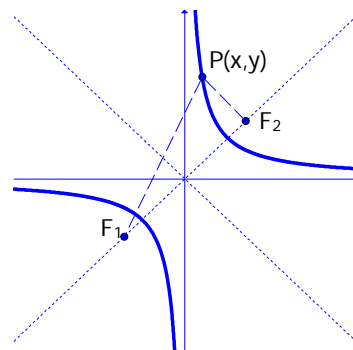
Dica 7: eleve y ao quadrado, sem se esquecer que y é negativa em todo o seu domínio e coloque a função na forma $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Dica 8: eleve y ao quadrado, sem se esquecer que y é positiva em todo o seu domínio e coloque a função na forma $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

EXERCÍCIOS AVANÇADOS

9) Mostre que o gráfico de $y = Ax^2 + Bx + C$, onde A , B e C são reais e $A \neq 0$ é necessariamente uma parábola com diretriz paralela ao eixo horizontal x .

10) Considere a hipérbole equilátera ($a = b$) cujo eixo principal é a reta $y = x$, os focos são $F_1 = (-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ e $F_2 = (\sqrt{2}, \sqrt{2})$.



Dica 10: provando (a) significará concluir que o gráfico da função $y = 1/x$ é uma hipérbole equilátera. Esta função é conhecida por **função recíproca**. Utilize a definição de hipérbole para obter a equação desejada. Para resolver (b), analise a estrutura de resolução de (a) e perceba a relação entre as coordenadas do foco F_2 e o valor de k .

a) Mostre que sua equação é dada por $y = \frac{1}{x}$.

b) A função $y = \frac{k}{x}$ aparece na modelagem da Lei de Boyle que afirma que um gás, quando mantido a uma temperatura constante, ocupará um volume y inversamente proporcional à sua pressão x , onde k é uma constante. Mostre que seu gráfico também é uma hipérbole equilátera com eixo principal $y = x$ e ache as coordenadas de seus focos.